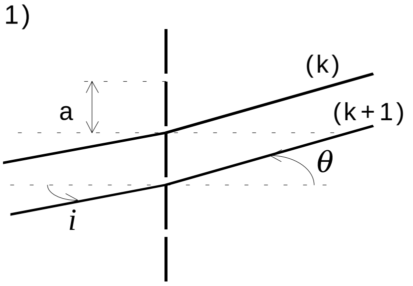
-EXERCICE 30.4-

• ENONCE :

« Eclairement donné par un réseau plan »

1)



On considère un réseau plan comportant au total N fentes, régulièrement espacées d'une distance a.
Il est éclairé par un faisceau parallèle, sous une incidence i.
L'observation se fait à l'infini (dans le plan focal d'une lentille convergente).
Dans un premier temps, les fentes sont supposées infiniment fines.

La source est supposée monochromatique, de longueur d'onde λ.

Après avoir déterminé le déphasage φ entre 2 rayons diffractés (k) et (k+1) dans une direction d'observation θ quelconque, exprimer l'éclairement $\mathrm{E}(\varphi)$.

En donner les principales caractéristiques.

Montrer que la position des maximums principaux pouvait être déduite sans calculs à partir de l'expression de φ.

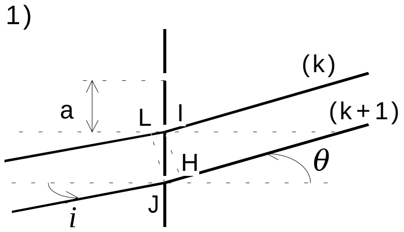
Conclure quant aux applications pratiques d'un réseau.

2) On considère maintenant le cas où la largeur des fentes est égale à b=a/5 ; comment est modifiée la fonction $\mathrm{E}(\varphi)$ (on pourra prendre $i=0$) ? Quelle en est la conséquence pratique ?

• CORRIGE :

« Eclairement donné par un réseau plan »

1)



D'après le théorème de Malus, le plan passant par les points J et K (L= projection orthogonale de J sur le rayon (k)) est un plan d'onde: les vibrations lumineuses sont donc en phase au niveau de ces points.
De même, toute différence de marche acquise avant les points I et H (H= projection orthogonale de I sur le rayon (k+1)) sera conservée par la suite.

La différence de marche entre 2 rayons consécutifs quelconques est donc égale à :

$$\delta_{k+1/k} = JH - LI = a(\sin\theta - \sin i) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin i)}$$

• Tous les rayons considérés sont issus d'un même train d'onde (division du front d'onde) $\Rightarrow$ ils sont cohérents et vont donc interférer ; il faut donc sommer les **amplitudes** des vibrations lumineuses. Ecrivons l'amplitude complexe du premier rayon :

$\underline{s}_1 = A\exp(i\omega t)$ ($A = cste$, car les fentes infiniment fines diffractent de façon isotrope)

Par ailleurs : $\underline{s}_{k+1} = \underline{s}_k \exp(-i\varphi) \Rightarrow \underline{s}_{tot} = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{s}_1 \exp(-ik\varphi) = \underline{s}_1 \times \dfrac{1-\exp(-iN\varphi)}{1-\exp(-i\varphi)} \Rightarrow$

$$\underline{s}_{tot} = \underline{s}_1 \times \frac{\exp(-iN\varphi/2)}{\exp(-i\varphi/2)} \times \frac{\exp(iN\varphi/2) - \exp(-iN\varphi/2)}{\exp(i\varphi/2) - \exp(-i\varphi/2)} = \underline{s}_1 \times \frac{\exp(-iN\varphi/2)}{\exp(-i\varphi/2)} \times \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$$

• On peut alors calculer l'éclairement :

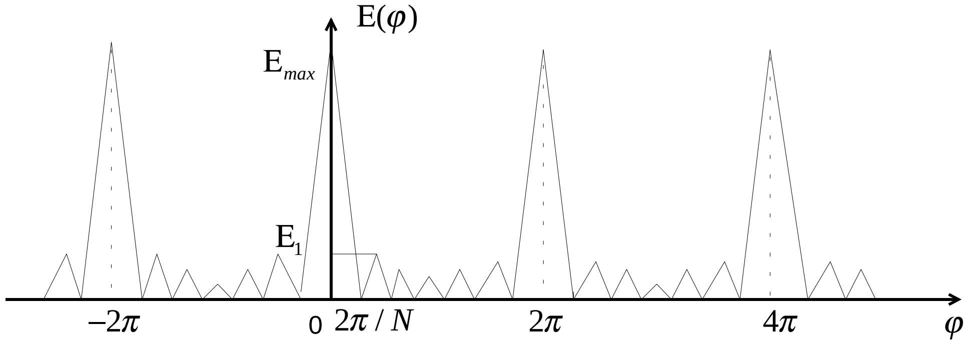
$$\boxed{\mathrm{E}(\varphi) = \left\langle \underline{s}_{tot} \times \underline{s}_{tot}^* \right\rangle_t = A^2 \times \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} = (NA)^2 \times \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{N^2 \sin^2(\varphi/2)}} \qquad \text{(avec } \underline{s}_1 \times \underline{s}_1^* = |\underline{s}_1|^2 = A^2 \text{)}$$

• La fonction est 2π -périodique $\Rightarrow$ on l'étudie dans l'intervalle $[0, 2\pi]$

♦ pour $\varphi \to 0$, $\sin(\varphi/2) \to \varphi/2 \Rightarrow \boxed{\mathrm{E}(\varphi) \to (NA)^2 = \mathrm{E}_{\max}}$: ceci correspond au cas où tous les rayons qui interfèrent sont **en phase** $\Rightarrow$ l'amplitude totale vaut NA, ce qui correspond bien à un éclairement (grandeur quadratique) égal à $(NA)^2$.

♦ l'éclairement s'annule pour $\sin(N\varphi/2) = 0 \Rightarrow \varphi = 2p\pi/N$, $p \neq 0$ et N ; d'où le graphe :

♦ le 1er maximum secondaire a lieu pour $\varphi \approx 3\pi/N \Rightarrow \boxed{\mathrm{E}_1 \approx \mathrm{E}_{\max} \times (2/3\pi)^2 \approx 0{,}04 \times \mathrm{E}_{\max}}$



 Christian MAIRE

Rq : le 2ème maximum secondaire serait donné par $\mathrm{E}_2 \approx \mathrm{E}_{\max} \times (2/5\pi)^2 \approx 0,016 \times \mathrm{E}_{\max}$; l'éclairement est donc **concentré** dans les directions correspondant aux **maximums principaux**, $\varphi = 2k\pi$, ce qui permet d'obtenir :

$$\varphi = 2k\pi = \frac{2\pi a}{\lambda}(\sin\theta_k - \sin i) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin\theta_k = \sin i + k \times \frac{\lambda}{a}} \quad \text{avec : } k \in \mathbb{N}$$

• La relation précédente, qui ne nécessite pas le calcul de l'éclairement, donne les directions des maximums principaux « **d'ordre k** » : θ_k étant une fonction de la longueur d'onde λ, on appliquera ce pouvoir **dispersif** d'un réseau aux mesures de longueurs d'ondes (on remarquera que dans l'ordre 0, $\theta = i \ \ \forall \lambda \Rightarrow$ pas de dispersion dans cet ordre).

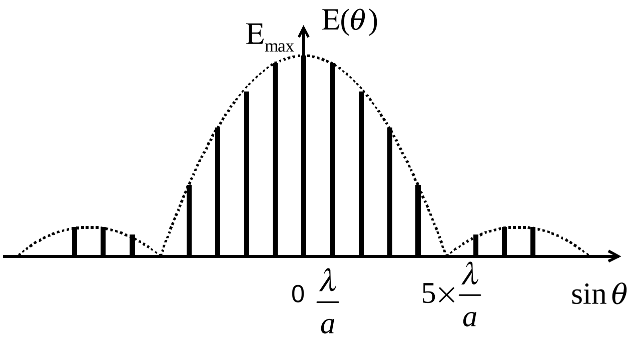
2) Cette fois, il faut tenir compte de la diffraction non isotrope de **chacune** des fentes ; on aura ainsi : $\underline{s}_1(\theta) = A(\theta)\exp(i\omega t) = A_{\max} \times \sin_c\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right) \times \exp(i\omega t)$; la suite du calcul est inchangée $\Rightarrow$

$$\boxed{\mathrm{E}(\theta) = (NA_{\max})^2 \times \sin_c^2\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right) \times \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{N^2 \times \sin^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}}$$

• b étant plus petit que a, on voit que la « fonction diffraction » ($\sin_c^2$) varie « moins vite » que la « fonction réseau » ($\frac{\sin^2(N\varphi/2)}{N^2 \times \sin^2(\varphi/2)}$) : c'est donc la première qui « enveloppe » la seconde.

• La fonction diffraction s'annule pour la 1ère fois en $\sin\theta = \lambda / b = 5\lambda / a$; les maximums principaux de la fonction réseau sont donnés par $\sin\theta = k\lambda / a \Rightarrow$ dans le lobe principal de la fonction diffraction, on pourra observer les maximums d'ordre –4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, c'est-à-dire 9 maximums (les ordres –5 et 5 correspondent à l'annulation de la fonction diffraction et ne sont donc pas visibles).

En pratique, les maximums situés dans les lobes secondaires de la fonction diffraction ne sont pas visibles ; l'éclairement en fonction de θ a donc l'allure suivante :



__Conséquence pratique__ :

Les maximums d'ordre élevé sont de moins en moins lumineux ; lorsqu'on travaille en source polychromatique, les **spectres** d'ordre élevé seront moins visibles: c'est un facteur qui limite le pouvoir de résolution d'un réseau, qui, à priori, augmente avec l'ordre du spectre (cf. cours 30).

